

Logaritmi.

$\log_a x = b$ se citește : logaritm în baza a , din b

Condiții de existență pt logaritm : - Baza a este un număr pozitiv, diferit de 1
- Argumentul x este un număr pozitiv

Definiție : $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ - adică : la ce putere trebuie ridicată baza a , ca să obținem numărul x ?

Ex : $\log_2 8 = 3$, pentru că $2^3 = 8$

$\log_3 9 = 2$, pentru că $3^2 = 9$

$\log_4 \frac{1}{16} = -2$, pentru că $4^{-2} = \frac{1}{16}$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$, pentru că $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

Proprietăți ale logaritmilor :

P1) $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$

P2) $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

P3) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

P4) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Notatie $\lg x = \log_{10} x$

Exemple : La P1 : $\log_7 7 = 1$; $\log_{\frac{5}{3}} \left(\frac{5}{3}\right) = 1$; $\log_{10} 1 = 0$

La P2 : $\log_2 32 = \log_2 (2)^5 = 5 \cdot \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5$

$\log_3 16 = \log_3 (2)^4 = 4 \cdot \log_3 2$

La P3-4 : Calculați $\log_3 6 + \log_3 12 - \log_3 8 = \log_3 \frac{6 \cdot 12}{8} = \log_3 9 = 2$

Exerciții

1) $\log_5 10 + \log_5 3 - \log_5 6 = \log_5 \frac{10 \cdot 3}{6} = \log_5 5 = 1$

2) $2 \log_3 4 - 4 \log_3 2 = \log_3 4^2 - \log_3 2^4 = 0$

Ecuatii logaritmice

1) Rezolvați ecuația $\log_4 (x+3) = 2$

Punem condiții de existență pentru logaritm :

- Argumentul, $x+3 > 0$ deci $x > -3$.

- Baza este 4, deci nu mai sunt necesare condiții asupra ei.

Domeniul de definiție va fi $D = (-3, +\infty)$

Rezolvare : $x+3 = 4^2$, adică $x+3 = 16$, deci $x = 13$

2) Rezolvați ecuația $\log_x(2x-4)=1$

Punem condiții de existență pentru logaritm :

- Baza $x > 0$ și diferită de 1.
- Argumentul $2x-4 > 0$ deci $x > 2$.

Domeniul de definiție va fi $D=(2,+\infty)$

Rezolvare : $2x-4 = x^1$, adică $x = 4$

3) Rezolvați ecuația $\log_3(6x-18) = \log_3(4x-8)$

Punem condiții de existență pentru logaritm :

- Argumentul $6x-18 > 0$ deci $x > 3$
- Argumentul $4x-8 > 0$ deci $x > 2$

Domeniul de definiție va fi $D=(3,+\infty)$

Rezolvare : Renunțăm la logaritmi, $6x-18 > 4x-8$, deci $6x-4x > 18-8$,
deci $2x > 10$, $x > 5$

4) Rezolvați ecuația $\log_{x-3}(x^2-3x+2) = 2$.

Punem condiții de existență pentru logaritmi : Argumentul $x^2-3x+2 > 0$. Este inecuație de gradul II.

Aflăm soluțiile ecuației de gradul II și apoi facem tabelul.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 ; a = 1 , b = -3, c = 2.$$

$$\text{Calculăm } \Delta : \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2}, \text{ deci } x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

Facem acum, tabelul de semn :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+++++	0	-----	0
	+++++	-----	0	+++++

Semnul lui a

semn opus lui a

Semnul lui a

Pe noi ne interesează când $x^2-3x+2 > 0$. Din tabel, observăm că între rădăcini, avem semnul +, deci > 0

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \text{ condiția 1}$$

$$\text{Baza } > 0 \text{ și diferită de } 1 \Rightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 4 \end{cases} \text{ condiția 2}$$

$$\text{domeniul de definiție este } D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \cap (3, \infty) \setminus \{4\} = (3, \infty) \setminus \{4\}$$

Rezolvarea ecuației : $\log_{x-3}(x^2-3x+2) = 2$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-3)^2$$

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow -3x + 4x = 9 - 2$$

$$\text{deci } x = 7 ; \text{ cum } 7 \text{ aparține domeniului, este soluție a ecuației.}$$

5) Rezolvați Ecuația $\log_x(2x-4)=1$

Punem condiții de existență pentru logaritmi :

Baza $x > 0$, Baza $x \neq 1$ și Argumentul $2x - 4 > 0$ deci $x > 2$.

Domeniul de definiție va fi $D = (2, +\infty)$

Rezolvare : $2x - 4 = x$, adică $x = 4$

6) $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$. Condiții de existență : $\begin{cases} x+2 > 0, x > -2 \\ x > 0 \end{cases}$ $D = (0, \infty)$

Rez. $\log_2(x+2) \cdot x = 3 \Rightarrow (x+2) \cdot x = 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 2$. Doar 2 e soluție

7) $\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3$ Condiții de existență : $\begin{cases} x+2 > 0, x > -2 \\ x-5 > 0, x > 5 \end{cases}$ $D = (5, \infty)$

Rez. $\log_2 \frac{x+2}{x-5} = 3 \Rightarrow \frac{x+2}{x-5} = 2^3 \Rightarrow x+2 = 8x-40 \Rightarrow x = 6 \in D$

Tema 1. Calculați : a) $\log_2 32 =$ b) $\log_3 81 =$ c) $\log_4 \frac{1}{64} =$ d) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25} =$

e) $\log_9 3 =$ f) $\log_3 \sqrt{3} =$ g) $\log_3 1 =$

2. Determinați domeniul de definiție pentru logaritmi următorii (adică condițiile de existență)

a) $\log_{x-1}(2x+4)$; b) $\log_{x+1}(x^2 + 5x + 6)$

3. Rezolvați ecuațiile logaritmice :

a) $\log_5(x+4) = \log_5(8-x)$ b) $\log_2(2x+5) = 3$ c) $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 2$

d) $\log_3(x+6) - \log_3(x-2) = 2$ e) $\log_2(2x-5) = 0$ f) $\log_{x+1}(2x+5) = 2$

4. Calculați a) $\lg 5 + \lg 40 - \lg 2 =$ b) $\log_3 6 + \log_3 12 - \log_3 8 =$

5. Calculați a) $\log_2 8 + \log_3 \frac{1}{9} - \sqrt[3]{27} =$